非線形双曲型方程式の解の超可微分性の伝播について(超函数と微分方程式)

佐々木, 徹

数理解析研究所講究録
935巻 1996年 118-133

非線型双曲型方程式の解の超可微分性の伝播について.

岡山大教養部　佐々木徹　(Toru Sasaki)

1. INTRODUCTION と主な結果.

ここでは，非線型双曲型方程式の解の超可微分性の伝播を考察する.

一般には，非線型波動方程式に対しては，線型波動方程式がみたす伝播定理は成り立たない．即ち，

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)u=f(u)$$

の解 u の特異台は，初期値の特異台を通る前方光錘全体の和集合に含まれるとは限らない．この様な例は，M. Reed，J. Rauch および M. Beals らによって示されている.（[**R-R**], [**B**]）

しかし，非線型方程式に対して成り立つような伝播定理もいくつか知られている．たとえば，S. Alinhac と G. Metivier は，解析的関数のカテゴリーで方程式

$$F(y,u,\cdots,\partial_y^\alpha u(y),\cdots)_{|\alpha|\leqq m}=0$$

に対して，解の解析性が曲面を横切って伝わるという，局所的な伝播定理を得ている.（[**A-M**]）

ここでは，S. Alinhac と G. Metivier のこの結果が超可微分関数のカテゴリーにおいても成り立つことを示す.

まず超可微分関数の関数の定義を述べる.（詳細については，たとえば [**Hö**], [**K-1**], [**L-W**] を参照.）Ω を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする．また $\alpha=$

$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ をマルチインデクスとする．また，以下のような記号の用い方をする．

$$\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_1} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n},$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n,$$

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!.$$

M_p を正数の数列で，次を満たすものとする：

(M.0)（正規化）

$$M_0 = M_1 = 1.$$

(M.1)（対数凸性）

$$M_p^2 \leqq M_{p-1} M_{p+1}, \quad p = 1, 2, 3, \cdots.$$

(M.2)（微分作用素に対する安定性）次をみたす正数 A, H が存在する：

$$M_{p+1} \leqq A H^p M_p, \quad p = 0, 1, 2, \cdots.$$

(M.3)（非準解析性）

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{M_{p-1}}{M_p} < \infty.$$

(M.4)（強対数凸性）

$$\left(\frac{M_p}{p!}\right)^2 \leqq \frac{M_{p-1}}{(p-1)!} \cdot \frac{M_{p+1}}{(p+1)!}, \quad p = 1, 2, 3, \cdots.$$

(M.5)

$$\lim_{p \to \infty} \frac{p M_{p-1}}{M_p} = 0.$$

この M_p に対し，超可微分関数のクラス $\{M_p\}$ および (M_p) を定義する．

定義 1.1. Ω上の C^∞ 関数 f がクラス $\{M_p\}$ (resp. (M_p)) であるとは，Ω の任意のコンパクト集合 K に対して定数 h および C が存在して (resp. 任意のコンパクト集合 K と任意の正数 h に対して定数 C が存在して) 次をみたすことである：

$$\sup_{x\in K} |\partial_x^\alpha f(x)| \leqq Ch^{|\alpha|} M_{|\alpha|}, \quad |\alpha| = 0, 1, 2, \cdots .$$

以下に，主要な定理を述べる．Ω を $\mathbb{R}^{n+1}$ の開集合とする．$\phi(y)$ を $C^2(\Omega)$ 級の関数とし，超曲面 S を $S = \{y; \phi(y) = 0\}$ とおく．ただし，ϕ は $d\phi \neq 0$ を S 上で満たすとする．また，$\Omega_\pm = \Omega \cap \{\pm\phi > 0\}$ とおき，S 上の点 $\mathring{y}$ の法線ベクトルで Ω_+ を向いているものを $\mathring{N}$ とする．

さて，F は，

$$\Omega \times u(\Omega) \times \cdots \times \partial_{x,t}^\alpha u(\Omega) \times \cdots, \qquad |\alpha| \leqq m$$

の閉包のある近傍でクラス $\{M_p\}$ (resp. (M_p)) であるとする．更に方程式

$$F(y, u, \cdots, \partial_y^\alpha u(y), \cdots)_{|\alpha|\leqq m} = 0 \tag{1.1}$$

が $(\mathring{y}, \mathring{N})$ および解 u に関して狭義双曲型であるとする．

この時，次の定理が成り立つ．

定理 1.1. *(1.1)* の解 $u \in C^\infty(\Omega)$ が Ω_- において クラス $\{M_p\}$ *(resp.* (M_p)*)* ならば，$\mathring{y}$ のある近傍において u はクラス $\{M_p\}$ *(resp.* (M_p)*)* である．

本講では，この定理について考察する．

2. 非線型項の L^∞ 評価.

ここでは，非線型項の L^∞ 評価を考察し，その応用として Cauchy-Kowalevsky タイプの定理を証明する．この定理は，セクション 4 で定理 4.1 を証明するのに用いられる．

合成関数の評価に都合の良いように，クラス $\{M_p\}$ の定義において M_p のかわりに使う数列 $\tilde{M}_{p,N}$ を次のとおりに定める．

命題 2.1. N を自然数とする．正の数 $c_{0,N}$ で，次のようなものが存在する．すべてのマルチインデックク $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)>0$ に対して，

$$\sum_{0\leqq\beta\leqq\alpha}\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}\frac{c_{0,N}|\beta|!}{(|\beta|+1)^{2N}}\frac{c_{0,N}|\alpha-\beta|!}{(|\alpha-\beta|+1)^{2N}}$$

$$\leqq\frac{c_{0,N}|\alpha|!}{(|\alpha|+1)^{2N}}$$

$$\sum_{0<\beta\leqq\alpha}\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}\frac{c_{0,N}|\beta|!}{(|\beta|+1)^{2N}}\frac{c_{0,N}(|\alpha-\beta|+1)!}{((|\alpha-\beta|+1)+1)^{2N}}$$

$$\leqq|\alpha|\frac{c_{0,N}|\alpha|!}{(|\alpha|+1)^{2N}}$$

が成立する．

自然数 N に対してこの $c_{0,N}$ を用い，$\tilde{M}_{p,N}$ を

$$\tilde{M}_{p,N}=\frac{c_{0,N}M_p}{(p+1)^{2N}}$$

で定義する．定義 1.1 において，この $\tilde{M}_{p,N}$ を M_p のかわりに用いても，クラス $\{M_p\}$ は変わらないことに注意する．

さて，つぎに非線型項の評価を考える．超可微分関数の合成に関する評価は，**[K-2]**, **[K-4]**, **[L-W]**, **[S]**, **[Y-1]**, **[Y-K]** などでも得られている．

ここでは，[S] で得られている評価を，変数を 2 つの部分に分けた形で考察する．

最初に，形式的べき級数について簡単に考察する．

$$F(Y)=\sum_{\beta\geqq 0}\frac{F_\beta}{\beta!}Y^\beta,$$

$$G(Y)=\sum_{\beta\geqq 0}\frac{G_\beta}{\beta!}Y^\beta,$$

を X の形式的べき級数とする．

定義 2.1. 自然数 r に対して，F が G によって次数 r までおさえられているとは，

$$F_\beta\leqq G_\beta,\quad |\beta|\leqq r$$

が成立することで，

$$F\overset{(r)}{\ll}G$$

と表す．

次に導関数の L^∞ ノルムを考える．Λ を $\mathbb{R}^\kappa$ の開集合とし，f を Λ 上のスムースな関数とする．f の導関数を形式的べき級数

$$F(Y)=\sum_{q=0}^{\infty}\frac{F_q}{q!}Y^q$$

を用いて次の様に評価する．

定義 2.2. r を自然数とし，K をΛ の部分集合とする．f の導関数と $F(Y)=\sum_{q=0}^{\infty}\frac{F_q}{q!}Y^q$ の係数が

$$\|\partial_y^\beta f\|_{L^\infty(K)}\leqq F_{|\beta|},\quad |\beta|\leqq r$$

を満たすとき，f は K 上次数 r まで F によって L^∞ ノルムの意味でおさえられるといい，

$$f \overset{(r:L^\infty(K))}{\ll} F$$

と書く．すべての自然数 r に対して，これが成り立つ時には，単に f が K 上 F によって L^∞ ノルムの意味でおさえられるといい，

$$f \overset{(L^\infty(K))}{\ll} F$$

と表すことにする．

さて，非線型項の評価にうつろう．まず，C^∞ 関数にたいしてセミノルムを定義する．

Ω を $\mathbb{R}^{\mu+\nu}$ の開集合とする．変数を $(x,y)=(x_1,\cdots,x_\mu,y_1,\cdots,y_\nu)$ の様に表す．また，Γ を Ω の部分集合，h, H を正の数とする．このとき，$u=(u_1,u_2,\cdots u_\kappa)\in C^\infty(\Omega;\mathbb{R}^\kappa)$ に対し，セミノルムを

$$|u|_{j,l;\Gamma}=\sum_{1\leqq i\leqq \kappa}\max_{\substack{|\alpha|=j\\|\beta|=l}}\|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta u_i\|_{L^\infty(\Gamma)},$$

$$[u]_{p,q,h,H;\Gamma}=\max_{0<(j,l)\leqq(p,q)}\frac{|u|_{j,l;\Gamma}}{\tilde{M}_{j+l}h^jH^l}.$$

で定義する．ここで $\mathbb{Z}_+$ は $\{0,1,2,\cdots\}$ を表す．また，ここで$\tilde{M}_{j,2}$ を $\tilde{M}_j$ と書いている．以下，このセクションでは，$\tilde{M}_j=\tilde{M}_{j,2}$ とする．

このセミノルムを評価するために，２変数の形式的べき級数

$$F(X,Y)=\sum_{p,q=0}^{\infty}\frac{F_{p,q}}{p!q!}X^pY^q$$

で，u の導関数を評価することを考える．定義 2.2 と同様に次の様な定義を考える．

定義 2.3. r, s を自然数とし, K を Ω の開集合とする. u の導関数と $F(X,Y) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{F_{p,q}}{p!q!} X^p Y^q$ の係数が,

$$\|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta u\|_{L^\infty(K)} \leqq F_{|\alpha|,|\beta|}, \quad |\alpha| \leqq r, \quad |\beta| \leqq s$$

をみたすとき, u は K 上次数 (r,s) まで F によって L^∞ ノルムの意味でおさえられるといい,

$$u \overset{(r,s:L^\infty(K))}{\ll} F$$

と書く.

このような2変数の形式的べき級数を用いることにより, [S] と同様に, 次の補題を証明することが出来る.

補題 2.1. $u = (u_1, \cdots u_\kappa)$ を $C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^\kappa)$ に含まれる関数とし, p, q を自然数とする. u による $\overline{\Gamma}$ の像 $u(\overline{\Gamma})$ の閉包の近傍 Λ 上の C^∞ 関数 f がある正の定数 k, B にたいして

$$f(z) \overset{(L^\infty(\Lambda))}{\ll} B \sum_{r=0}^{\infty} \frac{k^r M_r}{r!} Z^r$$

をみたすとする.

このとき, $1 \leqq r \leqq p, 1 \leqq s \leqq q$ にたいして

$$k[u]_{r,s,h,H;\Gamma} < \frac{1}{2}$$

が成り立つならば,

$$[f \circ u]_{p,q,h,H;\Gamma} \leqq 2\kappa Bk[u]_{p,q,h,H;\Gamma}$$

が成立する.

補題 2.2 の証明について簡単に述べよう. セミノルムの定義により

$$u(x) \overset{(p,q;L^\infty(\Omega))}{\ll} \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{[u]_{r,s,h,H;\Gamma}\tilde{M}_{r+s}h^r H^s}{r!s!} X^r Y^s$$

が成立する. この右辺を

$$\sum_{(r,s)\in\mathbb{Z}_+\setminus\{(0,0)\}} \frac{U_{r,s}}{r!s!} X^r Y^s$$

と表わすと,

$$f\circ u \overset{(p,q;L^\infty(\Gamma))}{\ll} B\sum_{l=0}^{\infty} \frac{k^l M_l}{l!} \left(\sum_{(r,s)\in\mathbb{Z}_+\setminus\{(0,0)\}} \frac{U_{r,s}}{r!s!} X^r Y^s \right)^l$$

が, 成立する. よって, この右辺の形式的べき級数を計算すればよい. ここで, M_p に対するいくつかの仮定 (M.0) から (M.5) のうち, ここで主要な働きをするのは, (M.4) である. ここでは, 次の命題を用いる.

命題 2.1. *(M.4)* が成立するとする. この時,

$$\frac{M_{s+r-1}}{(s+r-1)!} \geqq \frac{M_s}{s!}\cdot\frac{M_r}{r!}, \quad r,s \geqq 1$$

が成り立つ.

これにより, M_p が, (M.0) と (M.4) をみたせば, すべての自然数 j, $p_1, p_2, \cdots, p_j$ に対して,

$$\frac{M_{p_1+p_2+\cdots+p_j}}{(p_1+p_2+\cdots+p_j)!} \geqq \frac{M_j}{j!}\cdot\frac{M_{p_1}}{p_1!}\cdots\frac{M_{p_j}}{p_j!}$$

が成立する（[**K-2**], [**K-3**], [**K-4**], [**L-W**], [**S**]）．これを用いて，形式的べき級数の計算をおこなうことにより，補題 2.1 を証明することが出来る．

さて，補題 2.1 を用いて Cauchy-Kowalevsky タイプの定理を示すことができる．基本的な方針は，[**S**] と同じである．Ω を $\mathbb{R}^\mu$ の開集合とし，T を正の数とする．また，$u(x,y) = (u_1(x,y), \cdots, u_\kappa(x,y))$ は$\Gamma = \overline{\Omega} \times [0,T]$ 上のなめらかな関数で $\mathbb{R}^\kappa$ に値をとるとする．

定理 2.1． $u \in C^\infty(\Omega \times (0,T); \mathbb{R}^\kappa)$ は

$$\partial_y u(x,y) = f(x,y,u(x,y),\partial_x u(x,y)),$$

の解とする．ただし，f は,

$$\overline{\Omega \times [0,T] \times u(\Omega,[0,T]) \times \partial_x u(\Omega,[0,T])}.$$

の近傍でクラス $\{M_p\}$ (resp. (M_p)) の $\mathbb{R}^\kappa$ 値関数とする．このとき y によらない正の定数 C, h が存在して（resp. すべての正の定数 h に対して y によらない定数 C が存在して）

$$\|\partial_x^\alpha u\|_{L^\infty(\Gamma)} \leqq C h^{|\alpha|} M_{|\alpha|}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^\mu,$$

を満たすならば u は Γ でクラス $\{M_p\}$ (resp. (M_p)) である．

この定理は，クラス $\{M_p\}$ の場合は補題 2.1 を用いて帰納法により証明する．クラス (M_p) の場合は，クラス $\{M_p\}$ に帰着させる（[**K-3**], [**S**]）．

3. 非線形項のソボレフノルムの評価.

このセクションでは合成関数の導関数のソボレフノルムについて考察する．ここで，ソボレフノルムを用いる理由は，後述する定理 4.2 を証明する際にエネルギー不等式を用いることにある．

a を正の数とし，$\Omega' = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < a\}$ とする．また，s を $s > n/2$ なる自然数とする．このとき，ソボレフの補題が成立し，またソボレフ空間 $H^s(\Omega')$ は積に関して閉じている．さらに，ある正数 a_0 が存在し，u，$v \in H^s(\Omega')$ に対し，

$$\|uv\|_{H^s(\Omega')} \leqq a_0 \|u\|_{H^s(\Omega')} \|v\|_{H^s(\Omega')}$$

が成立する．このソボレフノルムに関して，セクション 2 と同様な結果を得ることができる．

$u = (u_1, \cdots, u_\kappa)$ を Ω' 上のなめらかな関数とする．u のセミノルムを次のように定義する．

$$|u|_{j;H^s(\Omega')} = \sum_{1 \leqq \kappa} \max_{|\alpha|=j} \|\partial_x^\alpha u_i\|_{H^s(\Omega')},$$

$$[u]_{p,h;H^s(\Omega')} = \max_{1 \leqq q \leqq p} \frac{|u|_{q;H^s(\Omega')}}{\tilde{M}_q h^q}.$$

ただし，$\tilde{M}_{q,n}$ を $\tilde{M}_q$ と書いている．以下，セクション 3 およびセクション 4 では $\tilde{M}_q$ は $\tilde{M}_{q,n}$ を表すものとする．

補題 3.1．M_p は *(M.0)* と *(M.4)* をみたすとする．u は Ω' 上の C^∞ 関数とし，p は自然数とする．$\overline{u(\Omega')}$ の近傍 Λ 上の C^∞ 関数 $f(y)$ がある正数 k, B にたいして

$$\|(\partial_y^\alpha f) \circ u\|_{H^s(\Omega')} \leqq B k^{|\alpha|} M_{|\alpha|}$$

をみたすとする．

このとき，

$$a_0 k [u]_{p,h:H^s(\Omega')} < \frac{1}{2}$$

が成り立てば，次の *(1)*, *(2)*, *(3)* が成り立つ．

(1) $[f\circ u]_{p,h;H^s(\Omega')} \leqq 2\kappa a_0 kB[u]_{p,h;H^s(\Omega')}$,

(2) $|f\circ u|_{p+1;H^s(\Omega')} \leqq 2\kappa a_0 kB\{|u|_{p+1;H^s(\Omega')} + [u]_{p,h;H^s(\Omega')}\tilde{M}_{p+1}h^{p+1}\}$,

(3) $|\alpha| = p+1, \quad j = 1,\cdots,n, \quad l = 1,\cdots,\kappa$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\|\partial_x^\alpha((f\circ u)(\partial_{x_j}u_l)) - (f\circ u)\partial_x^\alpha\partial_{x_j}u_l\|_{H^s(\Omega')}\\
&\leqq 2\kappa a_0 kB\max\{1+\frac{a_0}{2n}, a_0\}\max\{1, |u|_{1;H^s(\Omega')}\}(p+1)\\
&\cdot\{|u|_{p+1;H^s(\Omega')} + [u]_{p,h;H^s(\Omega')}\tilde{M}_{p+1}h^{p+1} + ([u]_{p,h;H^s(\Omega')})^2\tilde{M}_{p+1}h^{p+2}\}.
\end{aligned}
$$

この定理の (1) と (2) は，セクション 2 や **[S]** と同様の方法で示すことができる．また，(3) は，(1) と (2) を用いて証明する.（**[A-M]**）

4. 定理 1.1 の証明について.

このセクションでは定理 1.1 の証明について考察する．陰関数定理（**[K-2]**）と変数変換を用いることにより方程式 (1.1) を

$$
\partial_t^m u + f(x,t,u,\cdots,\partial_{x,t}^\alpha u,\cdots)_{\alpha\in A_m} = 0 \tag{4.1}
$$

に帰着することができる．また，$\Omega = \{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}; |x|<a, 0<t<T\}$ を適当に取ることにより Ω における (4.1) の解の超可微分性を論ずればよいことがわかる．ここで,

$$
A_m = \{\alpha = (\alpha_1,\cdots,\alpha_{n+1}) : |\alpha| \leqq m, \alpha \neq (0,\cdots,0,m)\}
$$

である．また，$u\in C^\infty(\Omega)$ を Ω における (4.1) の解とし,

$$
f(x,t,v,\cdots,v^{(\alpha)},\cdots)
$$

は

$$\Omega \times u(\Omega) \times \cdots \times \partial_{x,t}^{\alpha} u(\Omega) \times \cdots , \quad \alpha \in A_m$$

の閉包 Λ でクラス $\{M_p\}$ (resp. (M_p)) であるとする．更に (4.1) の線型化

$$P = \partial_t^m + \sum_{\substack{\alpha \in A_m \\ |\alpha|=m}} \frac{\partial f}{\partial u^{(\alpha)}}(x, t, u, \cdots , \partial_{x,t}^{\gamma} u, \cdots)\partial_{x,t}^{\alpha}$$

が $\{t = \text{constant}\}$ に関して狭義双曲型であると仮定してよい．これにより定理 1.1 は次の定理からただちに導かれる：

定理 4.1. η, η_1 は正の数で，

$$\eta > 0, \quad \eta_1 > T - \eta a^2$$

を満たすとする．また，u を Ω における *(4.1)* の解とする．この時 u が $\Omega \cap \{t < \eta|x|^2 + \eta_1\}$ においてクラス $\{M_p\}$ *(resp.* $(M_p))$ ならば u は Ω においてクラス $\{M_p\}$ *(resp.* $(M_p))$ である．

定理 3.1 と同様に，定理 4.1 の証明においてもクラス (M_p) の場合はクラス $\{M_p\}$ に帰着される．

以下，クラス $\{M_p\}$ の場合を考えよう．

$\Omega' = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < a\}$ とする．Ω 上の C^∞ 関数 u を x の関数と見たセミノルムを

$$|u(\cdot, t)|_{p;H^s(\Omega')} = \max_{|\beta|=p} \|\partial_x^{\beta} u(\cdot, t)\|_{H^s(\Omega')},$$

$$\langle u(\cdot, t)\rangle_{p;H^s(\Omega')} = \max_{|\alpha| \leqq m-1} |\partial_{x,t}^{\alpha} u(\cdot, t)|_{p;H^s(\Omega')},$$

$$\langle \nabla_x u(\cdot, t)\rangle_{p;H^s(\Omega')} = \max_{1 \leqq j \leqq p} \langle \partial_{x_j} u(\cdot, t)\rangle_{p;H^s(\Omega')}$$

と表すことにする．

(4.1) を変形し，$|\beta| = p+1$ に対して，

$$P\partial_x^\beta \partial_{x_j} u = k_{\beta,j} + \partial_x^\beta (g_j) \tag{4.2}$$

とすることができる．更に，$k_{\beta,j}$ や g_j は f によって定まるクラス $\{M_p\}$ の関数 $f^{(\alpha)}$, $g_{(\beta,j)}$, $f_{(j)}$ によって，

$$(f^{(\alpha)} \circ \tilde{w})\partial_x^\beta \partial_{x_i} \partial_{x,t}^\alpha u - \partial_x^\beta \left((f^{(\alpha)} \circ \tilde{w})\partial_{x_i} \partial_{x,t}^\alpha u \right), \quad \alpha \in A_m,$$

$$-g_{(\beta,j)} \circ \tilde{w},$$

および

$$-f_{(j)} \circ \tilde{w}$$

らの和で表される．ここで，$\tilde{w}$ は，$\mathrm{id}(x,y) = (x,y)$ および $(\partial_{x,t}^\alpha u; \alpha \in A_m)$ を並べたベクトル値関数である．これらは，補題 3.1 の (2), (3) の左辺と同じ形の式であることに注意する．

いま，f はクラス $\{M_p\}$ であるから，ある正数 k, B にたいして，

$$\left\| \left(\partial_y^\gamma f^{(\alpha)} \right) \circ u \right\|_{H^s(\Omega')} \leqq Bk^{|\gamma|} M_{|\gamma|}, \quad |\gamma| = 0, 1, \cdots$$

$$\left\| \left(\partial_y^\gamma g_{(\beta,j)} \right) \circ u \right\|_{H^s(\Omega')} \leqq Bk^{|\gamma|} M_{|\gamma|}, \quad |\gamma| = 0, 1, \cdots$$

$$\left\| \left(\partial_y^\gamma f_{(j)} \right) \circ u \right\|_{H^s(\Omega')} \leqq Bk^{|\gamma|} M_{|\gamma|}, \quad |\gamma| = 0, 1, \cdots$$

が成り立つ．この k, B にたいして，$\delta = \frac{1}{2a_0 k}$ とおくと，補題 3.1 を用いることにより次の定理を示すことが出来る．

定理 4.2. 定理 *4.1* の仮定のもとで，ある定数 h, λ で次をみたすものが存在する：

すべての自然数 p にたいして

$$\langle \nabla_x u(\cdot,t)\rangle_{p;H^s(\Omega')} < \frac{\delta}{\kappa} e^{-\lambda t}\tilde{M}_p h^p_{\lambda,t}, \quad 0 \leqq t \leqq T$$

$$\langle u(\cdot,t)\rangle_{p;H^s(\Omega')} < \frac{\delta}{\kappa} e^{-\lambda t}\tilde{M}_p h^p_{\lambda,t} \quad 0 \leqq t \leqq T.$$

ここで，$he^{\lambda t} = h_{\lambda,t}$ とおいた．

エネルギー不等式より，$|\beta| = p+1$ に対して，

$$\langle \nabla_x u(\cdot,t)\rangle_{p+1;H^s(\Omega')} \leqq C_2 \int_0^t \|P\partial_x^\beta \partial_{x_j} v(\cdot,s)\|_{H^s(\Omega')} ds$$

が成り立つことに注意すれば，(4.2) より，定理 4.2 は 非線型項 $f^{(\alpha)}$，$g_{(\beta,j)}$，$f_{(j)}$ および解 $\tilde{w}$ に補題 3.1 を用いることにより帰納法で証明できることがわかる．

定理 4.2 より，u が定理 2.1 の仮定を満たすことがわかるので，定理 2.1 から，定理 4.1 がクラス $\{M_p\}$ の場合に成り立つことがわかる．以上より，定理 1.1 を証明することができる．

References

[A-M] S. Alinac and G. Metivier, *Propagation de l'analiticité des solutions de systèmes hyperboliques non-lineaires*, Inventiones Math. **75** (1984), 189–204.

[B] M. Beals, *Spreading of singularities for a semilinear wave equation*, Duke Math. J. **49** (1982), 275–286.

[G] P. Godin, *Propagation of analytic regularity for analytic fully nonlinear second order strictly hyperbolic equations in two variables*, Comm. in P.D.E. **11** (1986), 352–366.

[Hö] L. Hörmander, "The Analysis of Linear Partial Differential Operators," Vol.1, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1983.

[K-1] H. Komatsu, *Ultradistributions I*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **20** (1977), 25–105.

[K-2] H. Komatsu, *The implicit function theorem for ultra-differentiable mappings*, Proc. Japan Acad. **55** (1979), 69–72.

[K-3] H. Komatsu, *An Analogue of the Cauchy-Kowalevsky theorem for ultra-differentiable functions and a division theorem of ultra-distributions as its dual*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **26** (1979), 239–254.

[K-4] H. Komatsu, *Ultradifferentiability of solution of ordinary differential equations*, Proc. of Japan Acad. **56** (1980), 137–142.

[L] P. D. Lax, *Nonlinear hyperbolic equations*, Comm. on Pure Appl. Math. **6** (1953), 231–258.

[L-O] J. Leray and Y. Ohya, *Equations et systemès non-linéaires, hyperbolique non-stricts*, Math. Ann. **170** (1969), 167–205.

[L-W] J. Leray and L. Waelbroeck, *Normes des fonctions composées*, Colloque de Liege, CBRM (1965), 145–152.

[R-R] J. Rauch and M. Reed, *Singularities produced by the nonlinear interaction of three progressing waves; examples*, Comm. in P. D. E.. **7** (1982), 1117–1133.

[S] T. Sasaki, *Propagation of ultradifferentiability for the solutions of nonlinear hyperbolic equation in one space dimension*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **40** (1993), 529–547.

[Y-1] T. Yamanaka, *A new higher order chain rule and Gevrey class*, Annales of Global Analysis and Geometry **7-3** (1989), 179–203.

[Y-2] T. Yamanaka, *Inverse map theorem in the ultra-F-differentiable class*, Proc. Japan Acad. **65** (1989), 199–202.

[Y-K] T. Yamanaka and M. Koike, *On the composition and multiplica-*

tion of ultra-F-differentiable maps, Report on the Research Institute of Science and Technology, Nihon University **35** (1990), 51–68.